Càlcul precís de la matriu $R_m \equiv {}^{t}_{t+\Delta t}R$

Volem considerar la qüestió de la precisió del càlcul de la matriu $R_m \equiv {}^{t}_{t+\Delta t}R$. Sabem que R_m és una rotació donada per $R(x, w_x\Delta t)R(y, w_y\Delta t)R(z, w_z\Delta t)$, i que en el límit $\Delta t \to 0$ podem utilitzar l'expressió

$$R_m =^{t}_{t+\Delta t} R = \begin{bmatrix} 1 & -w_z\Delta t & w_y\Delta t \\ w_z\Delta t & 1 & -w_x\Delta t \\ -w_y\Delta t & w_x\Delta t & 1 \end{bmatrix}$$

però evidentment ens interessa trobar una expressió vàlida per a Δt finit. D'altra banda, en l'expressió anterior no es verifica que les files i columnes siguin ortogonals entre elles (ens podem convèncer fàcilment de que l'error ve causat per termes d'ordre Δt^2, que són nuls en el límit $\Delta t \to 0$. La forma més senzilla de trobar una expressió més precisa per a Δt finit és utilitzar l'expressió

$${}^{t}_{t+\Delta t}R = R(x, w_x\Delta t/2)R(y, w_y\Delta t/2)R(z, w_z\Delta t)R(y, w_y\Delta t/2)R(z, w_x\Delta t/2) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(w_x\Delta t/2) & -sin(w_x\Delta t/2) \\ 0 & sin(w_x\Delta t/2) & cos(w_x\Delta t/2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos(w_y\Delta t/2) & 0 & sin(w_y\Delta t/2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(w_y\Delta t/2) & & cos(w_y\Delta t/2) \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} cos(w_z\Delta t) & -sin(w_z\Delta t) & 0 \\ sin(w_z\Delta t) & cos(w_z\Delta t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} cos(w_y\Delta t/2) & 0 & sin(w_y\Delta t/2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(w_y\Delta t/2) & & cos(w_y\Delta t/2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(w_x\Delta t/2) & -sin(w_x\Delta t/2) \\ 0 & sin(w_x\Delta t/2) & cos(w_x\Delta t/2) \end{bmatrix}$$

El fet d'utilitzar una expressió donada pel producte de matrius unitàries (files ortogonals entre sí) ens garanteix que l'expressió completa és unitària ella mateixa. Donat que l'algorisme de càlcul utilitza moltes vegades la matriu $R_m$és molt important que aquesta sigui acurada.