TRACTAMENT DE DADES EXPERIMENTALS

0.1 Introducció

La determinació experimental de qualsevol magnitud física es realitza mitjançant aparells de mesura i el posterior tractament de les dades obtingudes. Qualsevol que sigui el grau de complexitat d'una mesura, les dades experimentals que s'obtenen sempre tenen una certa imprecisió que cal saber valorar. El grau d'imprecisió, o de fiabilitat, d'aquestes dades es caracteritza amb una quantitat anomenada error experimental. Aquest és el sentit que donem al concepte d'error en ciències experimentals, que no té res a veure amb la idea d'equivocació. Així, doncs, el resultat d'un experiment és el valor de la magnitud buscada i el de l'error amb què s'ha trobat.

0.2 Mesures i errors: error absolut i error relatiu

Quan mesurem una determinada magnitud (massa, temperatura, voltatge, intensitat...), el resultat que obtenim no és un resultat exacte sinó un interval al voltant d'un resultat aproximat. El resultat de la mesura s'acostuma a escriure com

$$x \pm e_x$$

on x indica el resultat de la mesura que es considera millor i e_x és un nombre real positiu (amb les mateixes unitats que x) que s'anomena **error absolut**. Aquesta expressió indica que el valor de la magnitud mesurada està comprès entre $x - e_x$ i $x + e_x$.

Per tal de valorar la qualitat d'una mesura és més convenient utilitzar l'error relatiu. L'**error relatiu** d'una determinada magnitud es defineix com

$$e_{rel}(x) = \frac{e_x}{|x|}$$

L'error relatiu és un nombre adimensional que s'acostuma a expressar en tant per cent.

0.3 Expressió d'un resultat experimental

El fet que el valor experimental d'una determinada magnitud tingui un error associat limita el nombre de xifres que tenen sentit. Pensem, per exemple, com interpretar que el valor d'una magnitud és

$$237.843 \pm 9.641$$

En aquest exemple és absurd donar tres decimals en el valor de la magnitud si l'error amb què està afectada és pràcticament de l'ordre de 10. Per la mateixa raó donar l'error com 9.641 és absurd, ja que les mil·lèsimes no tenen cap significat. Per tant, hem de suprimir xifres.

Hi ha tres possibles maneres de suprimir xifres d'una quantitat:

a) **Aproximació per defecte o truncament:** Consisteix a suprimir les xifres sobrants.

Exemple (si només es volen dos decimals):

$12.5598 \rightarrow 12.55$; $12.5508 \rightarrow 12.55$; $12.5550 \rightarrow 12.55$

b) **Aproximació per excés:** Consisteix a suprimir les xifres sobrants i sumar una unitat a l'última xifra expressada.

Exemple (si només es volen dos decimals):

$12.5598 \rightarrow 12.56$: $12.5508 \rightarrow 12.56$: $12.5550 \rightarrow 12.56$

c) **Arrodoniment:** Consisteix en truncar o aproximar per excés d'acord amb el criteri següent:
- Si la xifra d'ordre més alt suprimida és inferior a 5, es trunca
- Si la xifra d'ordre més alt suprimida és superior o igual a 5, s'aproxima per excés

Exemple (si només es volen dos decimals):

$12.5598 \rightarrow 12.56$; $12.5508 \rightarrow 12.55$; $12.5550 \rightarrow 12.56$

Criteris per a l'expressió correcta d'un resultat

Normalment, l'error s'expressa amb una o dues xifres sense comptar els zeros que indiquen ordre decimal, és a dir, amb una o dues **xifres significatives**. Per exemple, la primera xifra significativa de 0.09641 és el 9 i la segona el 6.

L'ERROR SEMPRE S'APROXIMA PER EXCÉS.

Exemples de l'expressió correcta dels errors:

Valor	2 xifres significatives	1 xifra significativa
1.3458	1.4	2
57.763	58	$60 = 6\times10$
0.0276	0.028	0.03
$247000 = 24.7\times10^4$	$250000 = 25\times10^4$	3×10^5
0.0298	0.030	0.3

Una vegada s'ha expressat l'error amb una o dues xifres significatives, el valor de la magnitud s'expressa de manera que l'última xifra significativa sigui del mateix ordre que la d'ordre més baix a l'error.

EL VALOR DE LA MAGNITUD SEMPRE S'ARRODONEIX.

Exemples de l'expressió correcta del resultat d'una mesura:

Magnitud	Error	Expressió correcta
2.5483	1.3458	2.5 ± 1.4
3458.9353	57.763	3459 ± 58
67.8295	0.0276	67.830 ± 0.028
98657320.6	247000	$9866\times10^4 \pm 25\times10^4$
809.4563	0.0298	809.456 ± 0.030

Al laboratori expressarem els errors amb 2 xifres significatives (com a l'exemple).

0.4 Diferents tipus d'error

Encara que les causes dels errors en les mesures experimentals són molt variades, els diferents tipus d'errors es poden englobar en dos grups:

- Errors instrumentals o sistemàtics
- Errors accidentals

Errors instrumentals

Entenem per error instrumental la diferència entre el valor d'una magnitud donat per un aparell de mesura i el seu valor real, en condicions ideals (és a dir, si poguéssim controlar tots els factors que incideixen sobre l'experiment).

Els diferents tipus d'errors instrumentals que presenta tot aparell són els següents:

L'**error de zero** (o corriment d'escala) és el valor que indica l'aparell quan la magnitud mesurada correspon al valor inicial d'escala. Alguns aparells permeten corregir-lo.

L'**error d'escala** és la diferència entre la magnitud mesurada i el valor real a diferents punts de l'escala de mesura. L'error d'escala es determina calibrant l'aparell. En el laboratori, els diferents aparells han estat prèviament calibrats.

L'**error de resolució** és degut a la precisió intrínseca de l'aparell. Aquest error és característic de cada aparell i, normalment, el fabricant de l'aparell indica el seu valor. Si no és així, se segueix el següent criteri per determinar el seu valor:

a) En els aparells analògics es considera que l'error de resolució és igual a la meitat de la diferència entre dos valors consecutius de l'escala.

b) En els aparells digitals es considera que l'error de resolució és igual a una unitat en l'últim dígit.

L'error de resolució és inherent a qualsevol mesura i, per tant, inevitable, de manera que no podem assolir resultats amb un error inferior a l'error de resolució.

Errors accidentals

Quan es repeteix una mesura més d'una vegada en, aparentment, idèntiques condicions, sovint s'observa que els resultats no coincideixen. Si hom pogués controlar tots els factors que incideixen sobre un experiment sempre trobaria el mateix resultat. A la pràctica, però, hi ha una sèrie de factors aleatoris que provoquen desviacions en els resultats d'una mateixa magnitud. Aquestes desviacions introdueixen una incertesa en el resultat final que s'anomena error accidental. L'estimació d'aquest tipus d'error es basa en mètodes estadístics.

En la majoria de mesures que farem, els errors accidentals acostumen a ser inferiors a l'error de resolució i no els tindrem en compte.

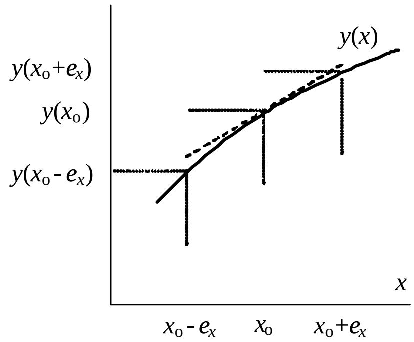
0.5 Propagació d'errors

Sovint estem interessats en magnituds que no podem mesurar directament, i, en conseqüència, ens veiem obligats a avaluar-les a partir d'altres magnituds que sí que són directament mesurables. Per exemple podem trobar la densitat d'una esfera a partir de la mesura de la seva massa amb una balança i del seu diàmetre amb un palmer. Aleshores, cal determinar els errors de les mesures indirectes (la densitat) deguts als errors de les mesures directes (la massa i el diàmetre). És a dir, hem de saber com es propaga l'error de la mesura directa a una mesura indirecta.

Valor i error d'una magnitud funció d'una altra

Suposem que una magnitud mesurada indirectament, y, és funció només d'una magnitud mesurada directament, x. Per exemple, el volum de l'esfera com a funció del diàmetre.

Si en la mesura directa de la magnitud x hem obtingut un valor x_o, amb un error e_x, llavors la magnitud indirecta obtinguda, $y_o = y(x_o)$, estarà compresa entre $y(x_o - e_x)$ i $y(x_o + e_x)$.



Si considerem que prop del punt x_o la funció $y(x)$ ve donada aproximadament per la recta tangent a aquesta funció en x_o, això és

$$y(x) \approx y(x_o) + y'(x_o)\cdot(x - x_o)$$

on $y'(x_o)$ és el valor del pendent d'aquesta recta (és a dir, el valor de $y' = dy/dx$ en x_o), llavors els valors de $y(x)$ als extrems de l'interval $\{x_o - e_x\ ,\ x_o + e_x\}$ són (aproximadament)

$$y(x_o + e_x) \approx y(x_o) + y'(x_o)e_x \qquad \text{i} \qquad y(x_o - e_x) \approx y(x_o) - y'(x_o)e_x$$

En conseqüència, direm que l'error associat a la mesura indirecta y és la semilongitud de l'interval delimitat per aquests dos valors, de manera que podem escriure

$$\boxed{e_y = \left|\frac{dy}{dx}\right| e_x}$$

<u>Exemple</u>:

En la mesura del diàmetre d'una esfera hem obtingut $D = 4.5$ cm, amb un error total $e_D = 0.3$ cm. Quin és el volum de l'esfera?

El volum d'una esfera és $\quad V = \frac{4}{3}p\left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{p}{6}D^3 = \frac{p}{6}(4.5\text{cm})^3 = 47.713\text{cm}^3$

i, tenint en compte que $\quad V' = \frac{dV}{dD} = \frac{p}{2}D^2$

tenim $\quad e_V = \left|\frac{dV}{dD}\right| e_D = \frac{p}{2}D^2 e_D = \frac{p}{2}(4.5\text{cm})^2(0.3\text{cm}) = 9.543\text{cm}^3$

Per tant, direm que el volum d'aquesta esfera és $\quad V = (47.7 \pm 9.6)\ \text{cm}^3$

on hem expressat l'error amb dues xifres significatives (aproximant per excés),
i hem arrodonit el valor de la magnitud V de manera que l'última xifra significativa sigui la d'ordre més baix a l'error.

Error de les magnituds del tipus $y(x) = ax$ o $y(x) = a/x$

En el dos casos particulars de $y(x) = ax$ i $y(x) = a/x$ podem escriure

$$y(x) = ax \quad \Rightarrow \quad e_y = \left|\frac{dy}{dx}\right| e_x = |a|\, e_x = |ax| \frac{e_x}{|x|} = |y| \frac{e_x}{|x|}$$

$$y(x) = \frac{a}{x} \quad \Rightarrow \quad e_y = \left|\frac{dy}{dx}\right| e_x = \left|-\frac{a}{x^2}\right| e_x = \left|\frac{a}{x}\right| \frac{e_x}{|x|} = |y| \frac{e_x}{|x|}$$

Per tant, hem trobat la mateixa expressió de e_y en ambdós casos,

$$\left.\begin{array}{r} y(x) = ax \\ y(x) = a/x \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad e_y = |y| \frac{e_x}{|x|} = |y|\, e_{rel}(x)$$

Valor i error d'una magnitud funció d'altres

De vegades la magnitud mesurada indirectament y és funció de diverses magnituds (x_1, ..., x_i,..., x_N) que són les que mesurem directament, és a dir,

$$y = y(x_1, ..., x_i, ..., x_N)$$

Una magnitud d'aquest tipus seria l'àrea d'un triangle, que es calcula a través de l'expressió $A = bh/2$ on b és la base i h l'altura del triangle.

Per determinar l'error de y s'ha de procedir de la manera següent. Primer, s'ha de calcular l'error originat per cadascuna de les magnituds, x_i, com si la resta de variables fossin exactes, és a dir, com si y només fos funció de x_i i la resta de variables fossin constants. Aquest error, d'acord amb el que hem vist a l'apartat anterior, és

$$\boxed{e_y(x_i) = \left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right| e_{x_i} \qquad (i = 1, ..., N)}$$

on el símbol $\partial y/\partial x_i$ (que s'anomena derivada parcial de y respecte x_i) indica que estem determinant la derivada de y respecte la variable x_i considerant les altres variables com si fossin constants. Aleshores l'error total d'una magnitud afectada per diversos errors es defineix com

$$\boxed{e_y = \sqrt{e_y^2(x_i) + ... + e_y^2(x_N)}}$$

<u>Exemple</u>:

Calculeu l'àrea del triangle, si les mesures de la base (b) i l'altura (h) han donat

$$b = (10.0 \pm 0.6) \text{ cm} \quad \text{i} \quad h = (6.7 \pm 0.3) \text{ cm}$$

L'àrea és $A = bh/2 = (10.0 \text{ cm})(6.7 \text{ cm})/2 = 33.50 \text{ cm}^2$

L'error degut a b és $e_A(b) = \left|\frac{\partial A}{\partial b}\right| e_b = (h/2)e_b = (6.7 \text{ cm})(0.6 \text{ cm})/2 = 2.01 \text{ cm}^2$

i el de h és $e_A(h) = \left|\frac{\partial A}{\partial h}\right| e_h = (b/2)e_h = (10.0 \text{ cm})(0.3 \text{ cm})/2 = 1.50 \text{ cm}^2$

Per tant, l'error total és $e_A = \sqrt{e_A^2(b) + e_A^2(h)} = \sqrt{(2.01 \text{ cm}^2)^2 + (1.50 \text{ cm}^2)^2} = 2.508 \text{ cm}^2$

i direm que l'àrea del triangle és $A = (33.5 \pm 2.6) \text{ cm}^2$

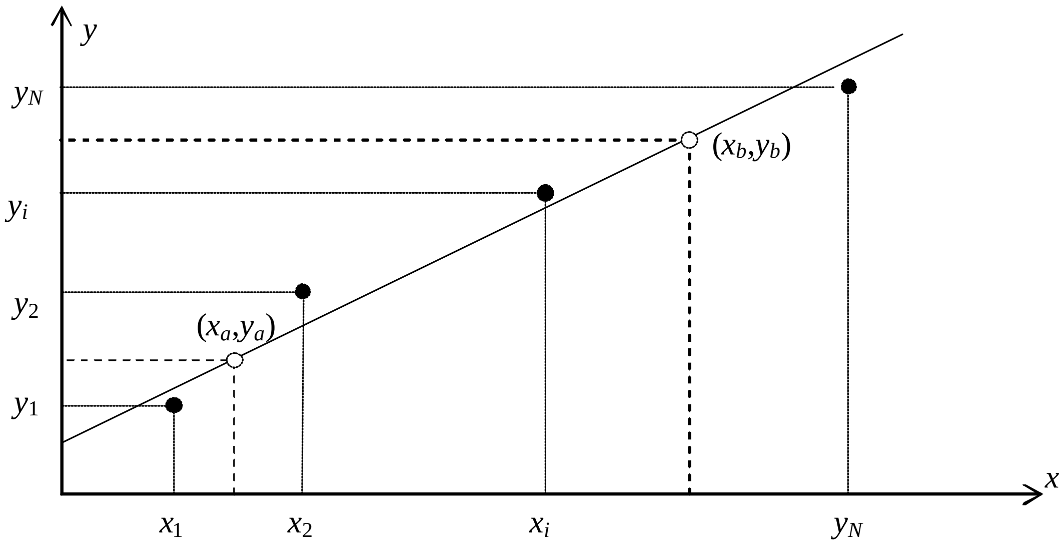
0.6 Regressió Lineal

Hi ha un tipus de mesures indirectes una mica diferent del que hem vist anteriorment. Ho explicarem amb un exemple.

La resistivitat r d'un material canvia amb la temperatura segons la relació

$$r = a\ T + r_0$$

on T és la temperatura en graus Celsius i r_0 és la resistivitat a 0 ºC. Si volem determinar els valors de a i r_0 hem de mesurar la resistivitat r a diferents temperatures T. Si mesurem r per a N valors diferents de T tindrem un conjunt de N parells de valors (T_i, r_i). Teòricament aquests punts haurien d'estar sobre la recta $r = a\ T + r_0$. A la pràctica, però, si posem els punts (T_i, r_i) en un gràfic observem que no estan perfectament alineats (a la gràfica són els punts negres). Això és conseqüència dels errors en les mesures de T i r.



En el cas general d'una magnitud y (r a l'exemple) que és funció d'una altra magnitud x (T a l'exemple) segons una relació lineal

$$y = ax + b$$

si volem determinar els valors de a i b (a i r_0 a l'exemple) haurem de mesurar y per a N valors diferents de x, de manera que tindrem N parells de punts (x_i, y_i). Llavors per determinar els valors de a i b tenim dos possibles procediments

a) **Procediment gràfic**: Dibuixem (amb un regle) una recta que passi el més aprop possible de tots els punts experimentals (els negres). No cal que la recta passi per cap punt. L'ordenada del punt de la recta dibuixada que talla l'eix de les y és el terme b,

$$b = y(x = 0)$$

I, a partir de dos punts (x_a, y_a) i (x_b, y_b) de la recta dibuixada (els blancs), el pendent és

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_b - y_a)}{(x_b - x_a)}$$

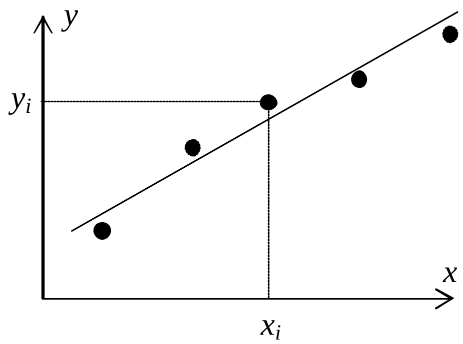
b) **Regressió líneal**: A partir dels N parells de valors (x_i, y_i) apliquem la teoria de la regressió lineal que es fonamenta en el mètode dels mínims quadrats i que expliquem tot seguit.

Mètode dels mínims quadrats

Suposem que tenim dues magnituds x i y que podem mesurar directament i entre les quals esperem trobar una relació lineal

$$y = ax + b$$

La qüestió que ens plantegem és com avaluar a i b a partir de diferents mesures de x i y, la qual cosa vol dir trobar quina és la recta que millor ajusta els N punts (x_i,y_i) representats en el pla xy.



Entre les diferents alternatives que tenim, la millor des del punt de vista matemàtic és el mètode dels mínims quadrats, que consisteix a fer mínima la suma dels quadrats de les diferències entre l'ordenada del punt experimental i la corresponent a la recta ajustada per a la mateixa abscissa.

Per a cada punt experimental (x_i, y_i), aquesta diferència seria

$$e_i = y_i - (ax_i + b)$$

Elevant al quadrat i sumant per a tots els punts experimentals, obtindrem

$$j\,(a,b) = \sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - (ax_i + b) \right]^2$$

Tenim, doncs, una funció de dues variables. Els valors de a i b que busquem són els que minimitzen $j\,(a, b)$ i, per tant, satisfan el sistema d'equacions donat per

$$\frac{\partial j}{\partial a} = 0 \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial j}{\partial b} = 0$$

La solució del sistema és

$$\boxed{\begin{array}{llll} a = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - N\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\bar{x}^2} & & \text{i} & b = \bar{y} - a\bar{x} \\[2em] \text{on} & \bar{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i & \text{i} & \bar{y} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \end{array}}$$

La recta caracteritzada per aquests paràmetres a i b, s'anomena **recta de regressió**.