El producte vectorial

Considerem dos vectors **A** i **B** de mòduls *A* i *B*, respectivament,

A = A_x **i** + A_y **j** + A_z **k** , amb mòdul $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

B = B_x **i** + B_y **j** + B_z **k** , amb mòdul $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$

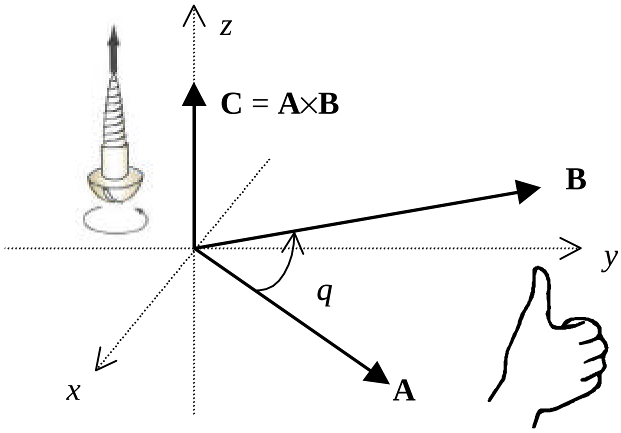
que formen un angle *q*.

El **producte vectorial** de dos vectors **A** i **B** es defineix com un vector **C** = **A**×**B** amb

mòdul: *C* = *AB*sin*q*

direcció: perpendicular al pla format per **A** i **B**

sentit: en el què avançaria un cargol que girés de **A** a **B** pel camí més curt



En el dibuix, **A** i **B** estan en el pla *xy* i, per tant, **C** = **A**×**B** té la direcció de l'eix *z*.

El sentit d'un producte vectorial també és pot determinar amb el **criteri de la mà dreta**. Es fan girar les puntes dels quatre dits (índex, mig, anular i petit) de **A** a **B** seguint l'angle *q* (pel camí més curt) i la punta del polze indica el sentit del producte vectorial.

A més a més d'aquesta definició geomètrica, el producte vectorial també es pot definir a partir de la relació algebraica següent

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y)\mathbf{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{k}$$

Fixeu-vos que aquesta relació és molt semblant a la del determinant d'una matriu.

En l'exemple del dibuix, com que $A_z = B_z = 0$, **A**×**B** = $(A_x B_y – A_y B_x)$**k**

Algunes de les propietats del producte vectorial són:

- El producte vectorial de dos vectors paral·lels (*q* = 0 o *q* = 180^o = *p* rad) és nul.

- El producte vectorial NO és commutatiu, **B**×**A** = **-** **A**×**B**.
El mòdul (*BA*sin*q*) coincideix; la direcció (perpendicular al pla de **B** i **A**) també, però el sentit és oposat (un cargol que gira de **B** a **A** avança en sentit oposat al de quan gira de **A** a **B**).

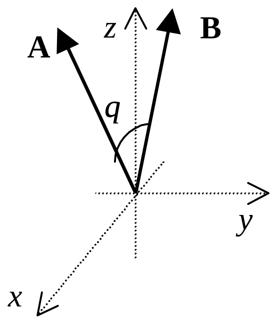
- El producte vectorial satisfà la propietat distributiva: **A**×(**B**+**C**) = **A**×**B** + **A**×**C**

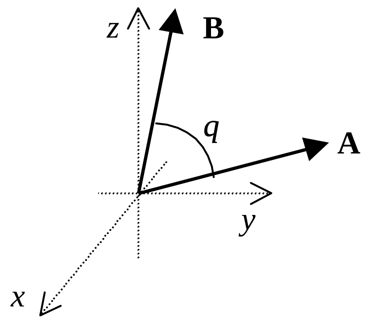
Problemes

1. Calculeu els productes vectorials **i**×**i** ; **i**×**j** ; **i**×**k** ; **j**×**i** ; **j**×**j** ; **j**×**k** ; **k**×**i** ; **k**×**j** ; **k**×**k**.

2. Calculeu el producte vectorial **A**×**B** per als vectors **A** = 5**i** + 6**j** i **B** = 3**i** - 2**j**? Quin angle formen aquests dos vectors? Quin és el producte vectorial **B**×**A**?

3. a) Els dos vectors **A** i **B** de la figura de l'esquerra estan en el pla *xz*. Si el mòdul dels dos és 5 i formen un angle de 30^o, quant val **A**×**B**?





b) Els dos vectors **A** i **B** de la figura de la dreta en el pla *yz*. Si el mòdul dels dos és 5 i formen un angle de 60^o, quant val **A**×**B**?

4. Quin és el producte vectorial **A**×**B** dels vectors **A** = **i** + 3**j** – 2**k** i **B** = **i** - **j**? Calculeu un vector de mòdul 6 perpendicular al pla format per **A** i **B**.

5. Quins són els dos vectors unitaris perpendiculars a **A** = 2**i** + **j** – 3**k** i **B** = **i** – 2**k**?

6. Comproveu que el producte vectorial satisfà la propietat distributiva, és a dir, que (**A**+**B**)×**C** = **A**×**C**+**B**×**C**. Considereu **A** = 2**i** + **j** – 3**k**, **B** = -**i** + 2**j** + **k** i **C** = **i** – **j**.

7. La força magnètica **F** que actua sobre una càrrega *q* que es mou amb una velocitat **v** en presència d'un camp magnètic **B** és **F** = *q***v**×**B**.
a) Quina força actua sobre un protó amb una velocitat (2×10^6 m/s)**i** en una regió de l'espai on hi ha un camp magnètic uniforme igual a **B** = (2**i** + 3**j**)$\times10^{-5}$ T.
b) Quina seria la força magnètica si en comptes d'un protó és tractés d'un electró?
c) Quina força actuaria sobre del protó si és mogués en sentit oposat (en el sentit negatiu de l'eix de les *x*)?
($q_p = e$; $q_e = -e$; $e = 1.6\times10^{-19}$ C).

Solucions dels problemes del producte vectorial

1. **i**×**i** = **0**; **i**×**j** = **k** ; **i**×**k** = -**j** ; **j**×**i** = -**k** ; **j**×**j** = **0** ; **j**×**k** = **i** ; **k**×**i** = **j**; **k**×**j** = -**i** ; **k**×**k** = **0**.

2. -28**k** ; 83.88^o ; 28**k**

3. a) -12.5**j** ; b) 21.65**i**

4. -2**i** –2**j** – 4**k** ; -2.45**i** – 2.45**j** – 4.9**k**

5. $\frac{1}{\sqrt{6}}$(-2**i** + **j** – **k**) i - $\frac{1}{\sqrt{6}}$(-2**i** + **j** – **k**)

6. (**A**+**B**)×**C** = (**i** + 3**j** – 3**k**)×(**i** – **j**) = -2**i** –2**j** – 4**k**
A×**C**+**B**×**C** = (-3**i** – 3**j** – 3**k**) + (**i** + **j** – **k**) = -2**i** –2**j** – 4**k**

7. a) (9.6×10^{-18} N) **k** ; b) -(9.6×10^{-18} N) **k** ; c) -(9.6×10^{-18} N) **k**