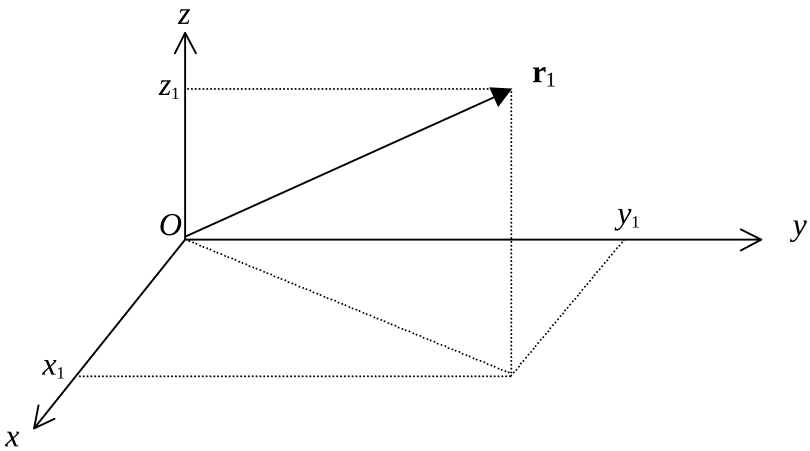
# Resum de vectors

En general, fixat un cert punt que prenem com origen ($O$), es defineixen tres eixos mútuament perpendiculars $x$, $y$ i $z$, o **eixos de coordenades**. La posició d'un cos es representa pel seu vector posició, que és el conjunt de les projeccions de la seva posició sobre cada un dels eixos de coordenades, també anomenades **coordenades cartesianes** o rectangulars, $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$.

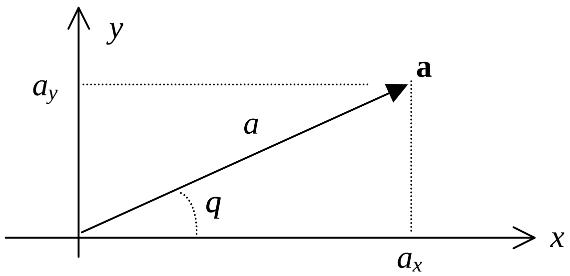



No sols la posició ve donada per un vector, sinó també moltes altes quantitats d'interès com la velocitat, l'acceleració i la força. Cal, doncs, fer un resum informal d'algunes propietats bàsiques dels vectors.

Els vectors s'indiquen amb una fletxa a sobre, $\vec{r}$ . Per problemes tipogràfics, però, sovint s'indiquen amb negreta, **r**, com en la majoria de llibres de Física.

Si ens limitem al cas de <u>dues dimensions</u>, un vector **a** ve donat per dos nombres $a_x$ i $a_y$, és a dir, les seves components cartesianes,

$$\mathbf{a} = (a_x , a_y )$$




Geomètricament podem imaginar el vector com la fletxa que, partint de l'origen de coordenades, arriba al punt ($a_x$, $a_y$). A partir de les seves components podem calcular el **mòdul del vector**, definit com

$$a = |\,\mathbf{a}\,| = (a_x^2 + a_y^2)^{1/2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Si pensem en el vector posició, el seu mòdul ens dóna la distància del cos a origen de coordenades. És a dir, el seu mòdul representa la longitud de la fletxa .

També podem calcular l'angle $q$ entre el vector i, per exemple, l'eix $x$. Les funcions trigonomètriques d'aquest angle són

$$\cos q = a_x / a \qquad \sin q = a_y / a \qquad \mathrm{tg}\ q = a_y / a_x$$

A l'hora de calcular les funcions trigonomètriques s'ha de tenir en compte que les components cartesianes $a_x$ i $a_y$ poden ser positives o negatives (quan no són nul·les), mentre que el mòdul $a$ sempre és una quantitat positiva. Aleshores, l'angle $q$ es calcula a partir de les funcions inverses corresponents, és a dir,

$$q = \arccos(a_x / a) \quad ; \quad q = \arcsin(a_y / a) \quad ; \quad q = \mathrm{arctg}(a_y / a_x)$$

El mòdul $a$ i l'angle $q$ constitueixen les **coordenades polars** del vector, a partir de les quals podem tornar a obtenir les coordenades cartesianes mitjançant les relacions

$$a_x = a \cos q \quad ; \quad a_y = a \sin q$$

En el cas de <u>tres dimensions</u> hi ha relacions similars. La generalització del concepte de mòdul és especialment senzilla

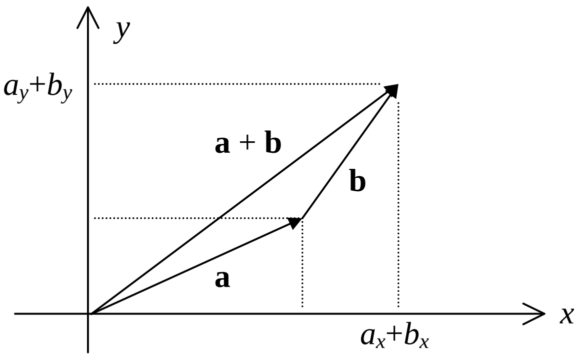
$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) \quad \rightarrow \quad a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Totes aquestes propietats bàsiques ens permeten pensar en un vector com en un objecte que té un **mòdul** (la seva longitud), una **direcció** (especificada pels angles amb els eixos), i un **sentit** (des de l'origen cap el punt ($a_x$, $a_y$, $a_z$)).

**Els vectors es poden sumar**, operació que en termes de les seves components és

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x\, , a_y + b_y\, , a_z + b_z),$$

i que satisfà la propietat commutativa ($\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$).




**Un vector es pot multiplicar per un escalar** (nombre real) $l$, operació que en termes de les components cartesianes s'expressa

$$l\mathbf{a} = (l a_x\, , \; l a_y\, , \; l a_z)$$

Aquesta operació satisfà la propietat commutativa $\quad l\mathbf{a} = \mathbf{a}l$
i les propietats distributives següents: $\quad l(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = l\mathbf{a} + l\mathbf{b}$

$$(l+m)\mathbf{a} = l\mathbf{a} + m\mathbf{a}$$

A més a més, permet definir el **vector unitari â** (amb el signe ^ de barret)

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a} / a$$

que com es pot comprovar té la mateixa direcció i sentit que **a**, però mòdul unitat. (Fixeu-vos que dividir per $a$ és equivalent a multiplicar pel seu invers, $1/a$.)

Uns vectors unitaris especialment útils són els que estan dirigits en el sentit positiu dels eixos de coordenades. En termes de components es defineixen com

$$\mathbf{i} = (1,0,0) \quad ; \quad \mathbf{j} = (0,1,0) \quad ; \quad \mathbf{k} = (0,0,1)$$

de manera que **i** va en el sentit positiu de l'eix de les $x$, **j** en el de les $y$ i **k** en el de les $z$. Aquests 3 vectors són mútuament perpendiculars i permeten expressar qualsevol vector de la forma següent

$$\mathbf{a} = (a_x\, , a_y\, , a_z) = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

**El producte escalar de dos vectors** és una operació que es defineix com

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z = ab \cos q$$

on $a$ i $b$ són els mòduls respectius i $q$ és l'angle mínim que formen els dos vectors. Fixeu-vos que en aquesta operació a partir de dos vectors s'obté un escalar (un número). És important adonar-se que el producte escalar de dos vectors perpendiculars ($q$ = 90º) és zero, i el de dos vectors paral·lels és $\pm ab$ (segons $q$ sigui 0º o 180º). El producte escalar satisfà la propietat distributiva següent:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$$

**Problemes**

**1**. La posició d'un punt ve donada per les coordenades cartesianes: $x$ = 2 m, $y$ = 3 m, $z$ = 1 m.
a) Escriviu el seu vector posició en les diferents notacions que conegueu.
b) Quina és la distància del punt a l'origen?

**2**. Sigui el vector $\mathbf{a} = \mathbf{i} + m\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Calculeu $m$ per tal que el seu mòdul sigui 3.

**3**. Dibuixeu el vector pertanyent al pla $xy$, $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.
a) Quant val el seu mòdul?
b) Quin angle forma amb l'eix $x$?
c) Determineu el seu vector unitari.

**4**. Expresseu en les seves components cartesianes en el pla $xy$ un vector de mòdul 5, que forma un angle de 36.87° respecte l'eix de les $x$.

**5**. Trobeu les components rectangulars dels vectors situats al pla $xy$, de mòdul $a$ i que formen un angle $q$ amb l'eix $x$, per als següents valors: a) $a$ = 10 m, $q$ = 30º ;
b) $a$ = 5 m, $q$ = 45º ; c) $a$ = 10 m/s, $q$ = 240º ; d) $a$ = 8 m/s$^2$, $q$ = 270º

**6**. Sumeu i resteu els vectors $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ i $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

**7**. Siguin els vectors $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ , $\mathbf{b} = m\mathbf{i} + 1.5\mathbf{j}$. Determineu $m$ per a què el vector $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ sigui unitari.

**8**. Siguin els vectors $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ , $\mathbf{b} = -4\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Calculeu:
a) el vector suma i el seu mòdul.
b) el vector diferència i l'angle que forma amb l'eix $x$.
c) el vector $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ i el vector unitari que defineix la direcció i sentit de $\mathbf{c}$.
d) el producte escalar.

**9**. Feu els productes escalars $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}$, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}$, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}$, $\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}$, $\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}$, $\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}$, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}$, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}$, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}$.

**10**. Sobre un cos actuen dues forces de mòduls: $F_1 = 5\ N$, $F_2 = 7\ N$, que formen respectivament els següents angles amb l'eix $x$: 60° i -30°. Determineu la força resultant (o força neta), el seu mòdul i l'angle que forma amb l'eix $x$.

**11**. Un cos està sotmès a l'acció de tres forces segons el pla $xy$ de mòduls 6 N, 3 N i 4 N, que formen uns angles de 45°, 30° i 60° respecte l'eix de les $x$. Calculeu el mòdul de la resultant i l'angle que forma respecte l'eix $x$.

**12**. Calculeu el producte escalar d'una força (5,3,4)N i un desplaçament (6,-1,2)m. Quin angle formen aquests dos vectors?

**13**. Feu el producte escalar de (4,8,-2) i (6,-2,4). Que podeu dir d'aquests dos vectors?

**14**. Considereu els vectors $\mathbf{a} = (-4,3,2)$, $\mathbf{b} = (6,2,-3)$ i $\mathbf{c} = (2,-2,0)$, i els escalars $l = 2$ i $m = 3$, i comproveu que se satisfan les següents propietats distributives
a) $l(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = l\mathbf{a} + l\mathbf{b}$ ; b) $(l+m)\mathbf{a} = l\mathbf{a} + m\mathbf{a}$ ; c) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$
d) Raoneu per què no té cap sentit escriure $\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})$

**Solucions dels problemes de vectors**

**1**. a) $\mathbf{r} = (2,3,1)\text{m} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k})\text{m}$ ; b) 3.74 m

**2**. $m = \pm 2$

**3**. a) 5; b) 36.87°; c) $\mathbf{u} = 0.8\mathbf{i} + 0.6\mathbf{j}$

**4**. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

**5**. a) (8.66,5)m ; b) (3.54,3.54)m ; c) (-5,-8.66)m/s ; d) (0,-8)$\text{m/s}^2$

**6**. $\mathbf{a}+\mathbf{b} = 6\mathbf{i}$ ; $\mathbf{a}-\mathbf{b} = 6\mathbf{j}$

**7**. $m = 1$

**8**. a) $-\mathbf{i}-\mathbf{j}$, $\sqrt{2}$ ; b) $7\mathbf{i}-3\mathbf{j}$, -23.2° ; c) $\mathbf{c} = 18\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$, $0.932\mathbf{i} - 0.362\mathbf{j}$ ; d) -14

**9**. $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1$, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0$, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0$, $\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} = 0$, $\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1$, $\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0$, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0$, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = 0$, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$

**10**. $(8.56\mathbf{i} + 0.83\mathbf{j})$N, 8.6 N, 0.097 rad

**11**. 12.76 N, 0.80 rad

**12**. 35 Nm = 35 J, 39.4°

**13**. El producte escalar és 0 i, per tant, els dos vectors són perpendiculars.

**14**. a) $l(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = l\mathbf{a} + l\mathbf{b} = (-4,10,-2)$ ; b) $(l+m)\mathbf{a} = l\mathbf{a} + m\mathbf{a} = (-20,15,10)$ ;
c) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = -38$ ;
d) $\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$ és un vector (el vector $\mathbf{a}$ per l'escalar $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$),
mentre que $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})$ és un escalar (el producte de l'escalar $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ i l'escalar $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$)

**Potències de 10**

| $10^{3n}$ | Prefix | Símbol |
|---|---|---|
| $10^{15}$ | peta | P |
| $10^{12}$ | tera | T |
| $10^{9}$ | giga | G |
| $10^{6}$ | mega | M |
| $10^{3}$ | kilo | k |
| | | |
| $10^{-3}$ | mil·li | m |
| $10^{-6}$ | micro | µ |
| $10^{-9}$ | nano | n |
| $10^{-12}$ | pico | p |
| $10^{-15}$ | femto | f |