

Ones electromagnètiques

1. La funció d'una ona harmònica que es propaga transversalment per una corda és $y(x,t) = (0.25 \text{ m}) \sin(50x - 1000t + \pi)$, on x s'expressa en metres i t en segons.
 - a) Quina és la velocitat de propagació, la longitud d'ona i la freqüència?
 - b) Quant val el desplaçament de la corda en un punt situat a 10 cm de l'origen de coordenades en l'instant $t = 10 \text{ ms}$?
2. Una ona harmònica transversal de 4 m d'amplitud es propaga per una corda de dreta a esquerra amb una velocitat de 10 m/s. Si la longitud d'ona és de 20 m, trobeu l'equació d'ona i la velocitat transversal màxima en qualsevol punt de la corda.
3. Una ona electromagnètica harmònica, plana i linealment polaritzada de 50 MHz de freqüència es propaga pel buit segons el sentit positiu de l'eix x . Si el vector amplitud del camp elèctric és $(3000 \text{ N/C})\mathbf{j}$, determineu:
 - a) El període, la longitud i el número d'ona.
 - b) El vector amplitud del camp magnètic.
 - c) Les funcions d'ona dels camps elèctric i magnètic.
4. Un camp elèctric sinusoidal, de direcció paral·lela a l'eix y , es propaga pel buit en el sentit positiu de l'eix z . La seva freqüència és de 250 MHz i té un valor màxim de 4 V/m. Determineu:
 - a) La longitud d'ona, el període, el nombre d'ones i la freqüència angular,
 - b) L'expressió del camp elèctric $\mathbf{E}(z,t)$.
 - c) L'expressió del camp magnètic.
 - d) El vector de Poynting.
 - e) Els valors mitjans de la densitat d'energia i la intensitat de l'ona.
5. Una ona electromagnètica plana de 10 m de longitud d'ona es propaga pel buit segons la direcció y . Se sap que el camp elèctric està polaritzat segons la direcció z i que la seva intensitat mitjana és de 0.2 W/m^2 . Calculeu:
 - a) Els camps elèctric i magnètic en funció del temps.
 - b) El vector de Poynting.
 - c) La potència incident en una superfície circular de radi 0.4 m perpendicular a l'eix y .
 - d) La força electromotriu màxima induïda en una bobina de 100 espires de radi 0.2 m que té el seu eix longitudinal orientat en la direcció x .
6. Escriviu les expressions dels camps elèctric i magnètic associats a les següents ones electromagnètiques que es propaguen en el sentit positiu de l'eix x :
 - a) Ona linealment polaritzada amb el pla d'oscil·lació del camp elèctric a 45° respecte del pla xy .
 - b) Ona linealment polaritzada amb el pla d'oscil·lació del camp magnètic a 60° respecte del pla xy .
7. El camp elèctric d'una ona electromagnètica oscil·la en la direcció y i el vector de Poynting és $\mathbf{S}(x,t) = (100 \text{ W/m}^2) \cos^2[10x - (3 \times 10^9)t] \mathbf{i}$, on x és en metres i t en segons.
 - a) Quan valen la longitud d'ona i la freqüència?
 - b) Quins són la direcció i el sentit de propagació de l'ona?
 - c) Trobeu les expressions dels camps elèctric i magnètic.

8. Una ona electromagnètica harmònica plana es propaga en el buit en el sentit positiu de l'eix x . La seva longitud d'ona és de 580 nm i l'amplitud del camp magnètic oscil·lant és de 86 nT. Sabent que l'ona està linealment polaritzada amb el pla d'oscil·lació del camp elèctric a 20° del pla xy , calculeu:

- Els camps elèctric i magnètic en funció del temps.
- El vector de Poynting.
- La intensitat i la densitat d'energia mitjanes.

9. Una emissora de ràdio emet, uniformement en totes direccions, amb una potència mitjana de 100 kW. Considerant l'aproximació d'ona harmònica, calculeu les amplituds dels camps elèctric i magnètic a les següents distàncies: a) 100 m, b) 1 km i c) 10 km.

10. Determineu la longitud d'ona de

- una ona de ràdio AM típica de 1000 kHz,
- una ona de ràdio FM típica de 100 MHz,
- un raig X de 10^{19} Hz.

Determineu la freqüència de

- una microona de 3 cm.
- l'espectre visible si el de longituds d'ona visibles va de 400 a 700 nm.

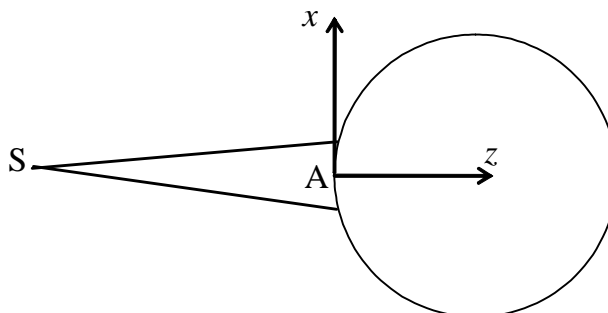
11. La intensitat de la llum del sol que incideix sobre la part superior de l'atmosfera terrestre s'anomena constant solar i val 1.35 kW/m^2 . Calculeu:

- El valor eficaç del camp elèctric i del camp magnètic deguts al Sol en aquesta regió.
- La potència mitjana emesa pel Sol.

Dades: Distància Sol-Terra = 1.49×10^{11} m.

12. Un satèl·lit de comunicacions (S) situat en una òrbita a 36000 km d'alçada respecte la superfície terrestre emet ones electromagnètiques linealment polaritzades de freqüència 11.2×10^9 Hz. La potència mitjana d'emissió és de 12 kW que es reparteix sobre una zona de la Terra de superfície $9 \times 10^6 \text{ km}^2$, que pot considerar-se plana i on és perfectament vàlida l'aproximació d'ones planes.

- Calculeu la intensitat mitjana de l'ona electromagnètica que arriba a una antena parabòlica (A) situada a la superfície de la Terra i la potència total mitjana que capta aquesta antena si el seu diàmetre és de 80 cm.
- Escriviu les expressions del camp magnètic i del camp elèctric que arriben a l'antena de l'anterior apartat. Considereu el sistema d'eixos de la figura, on s'ha pres l'eix x paral·lel al camp elèctric.



13. Per detectar ones electromagnètiques s'utilitza una espira circular de fil conductor de 30 cm de diàmetre. Una estació de ràdio emet uniformement en totes direccions a

100 MHz amb una potència de 50 kW. Quina és la màxima tensió eficaç induïda en l'escala a 10^5 m de l'emissora?

14. Una emissora de ràdio emet uniformement en totes direccions amb una potència mitjana de 10 kW. Disposem d'un receptor capaç de sintonitzar bé els senyals que li arriben quan aquests tenen una intensitat mitjana superior a 10^{-6} W/m².

a) Quina és la distància màxima entre l'emissora i el receptor a la qual podem sintonitzar l'emissora?

b) Quines són les amplituds dels camps elèctric i magnètic de l'ona a aquesta distància màxima?

15. Una ona electromagnètica plana, harmònica i linealment polaritzada es propaga en el buit en sentit negatiu de l'eix x . L'amplitud del camp elèctric és $\mathbf{E}_0 = (2 \text{ V/m}) \mathbf{j}$ i la longitud d'ona és de 600 nm. També sabem que a l'instant $t = 0$ el punt $x = 0$ presenta un màxim del camp elèctric. Determineu:

a) L'expressió dels camps elèctric i magnètic.

b) El valor mig de la intensitat de l'ona.

c) El percentatge d'intensitat de la llum que passarà a través d'un vidre polaritzador perpendicular a l'eix x , si el seu eix òptic forma un angle de 60° amb l'eix y .

d) La freqüència i la longitud d'ona quan aquesta es propaga per un vidre d'índex de refracció $n = 1.5$.

16. Un feix de llum no polaritzada amb una intensitat de 6 W/m^2 es propaga en la direcció de l'eix z .

a) Aquesta llum incideix sobre una làmina polaritzadora que té el seu eix de transmissió (també anomenat de polarització) en la direcció x , és a dir, que només deixa passar llum amb el camp elèctric en aquesta direcció. Quina és la intensitat de la llum polaritzada que surt de la làmina?

b) A continuació, la llum emergent (la que surt de la làmina) incideix sobre una segona làmina polaritzadora l'eix de la qual forma un angle de 30° amb l'eix x . Quin percentatge de la intensitat inicial travessarà les dues làmines?

17. Disposem de quatre làmines polaritzadores situades paral·lelament l'una a continuació de l'altra de manera que l'eix de transmissió d'una forma un angle de 25° amb l'eix de l'anterior. Si un feix de llum no polaritzada incideix perpendicularment sobre les làmines, quina fracció de la intensitat de la llum travessarà les quatre làmines?

18. Quina és la velocitat de la llum a l'aigua ($n = 1.333$)? Tenint en compte que quan una ona passa d'un medi a un altre la seva freqüència no varia, quina és la longitud d'ona a l'aigua d'un feix monocromàtic de llum vermella que a l'aire té una longitud d'ona de 700 nm? Un nedador sota l'aigua veurà el mateix color o un de diferent?

19. Calculeu l'angle de refracció d'un feix de llum que incideix des de l'aire sobre la superfície d'un vidre ($n = 1.5$) amb un angle de a) 20° , b) 30° , c) 45° , d) 60° .

20. Un dipòsit cilíndric totalment ple d'aigua ($n = 1.333$), obert per la seva part superior, té un diàmetre de 3 m. Quan els raigs de sol formen un angle de 30° amb l'horitzontal la llum deixa d'il·luminar el fons del dipòsit. Quina és l'alçada del dipòsit?

21. Quin és l'angle crític per a la reflexió total interna de la llum des de l'aigua en una superfície aigua-aire?

22. A les fibres òptiques és essencial que la llum que circula pel nucli es reflecteixi totalment en la separació nucli-recobriment. Suposem que tenim una fibra amb nucli de quars d'índex de refracció 1.46 i un recobriment d'índex 1.4454.

a) Calculeu l'angle crític per tal que es produeixi l'esmentada reflexió total interna.

b) A l'entrada de la fibra, quin serà l'angle màxim que podrà formar un raig de llum amb l'eix de la fibra per tal que, un cop dins de la fibra, reboti totalment en les parets interiors?

23. Un cable de comunicacions de fibra òptica de 50 km està format per un nucli de quars amb un índex de refracció 1.46 i una capa envoltant de quars dopat amb B_2O_3 d'índex 1.457.

a) Quin és l'angle crític?

b) Si les reflexions totals internes es fan totes amb un angle de 87° i el diàmetre del nucli és de $100 \mu\text{m}$, quin és el nombre de reflexions que hi ha en el cable?

24. Suposeu que tenim dues fonts coherents que emeten ones electromagnètiques en fase, amb el mateix vector amplitud (de mòdul $E_0 = 1\text{V/m}$) i amb una longitud d'ona de 1 m. Digueu quina serà l'amplitud de l'ona resultant en un punt que es troba a les següents distàncies de les fonts 1 i 2, respectivament:

a) 20 m i 21 m

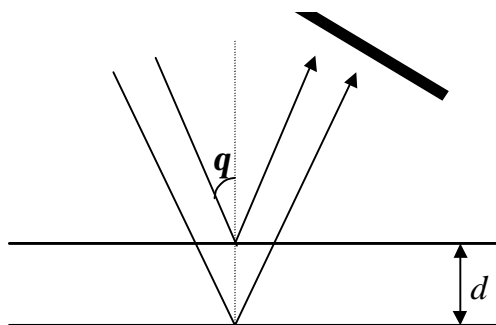
b) 21 m i 21.5 m

c) 22 m i 22.25 m

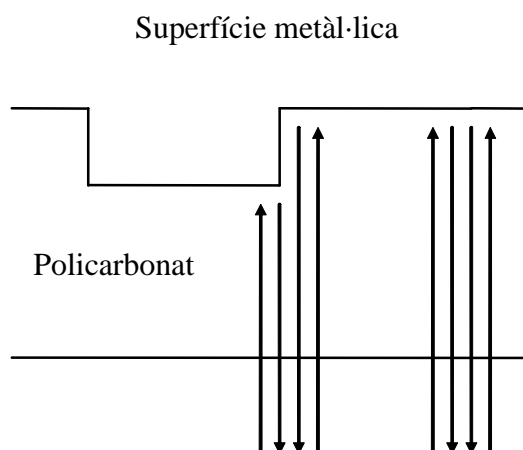
(Considerem que les ones són planes i que, per tant, la seva amplitud no varia amb la distància.)

25. Repetiu el problema anterior suposant ara que les fonts també són coherents però emeten en oposició de fase (diferència de fase de 180°)

26. La figura següent representa un interferòmetre format per dos miralls, el superior semitransparent (deixa passar una part de la llum que incideix sobre seu). Si la distància entre ells és d i l'angle d'incidència és θ , trobeu quines són les condicions per tal d'observar un màxim o un mínim a la pantalla superior dreta. (Suposeu ones planes).

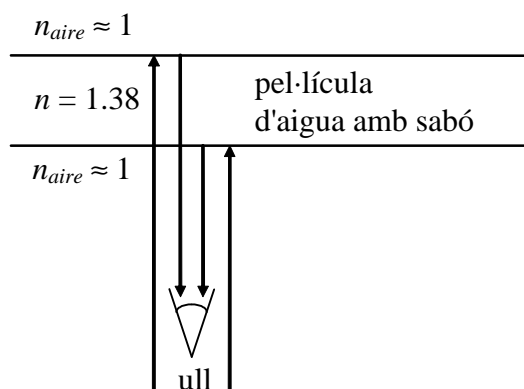


27. La profunditat dels forats de la superfície metàl·lica d'un CD-ROM és de $0.11 \mu\text{m}$. Aquesta superfície es troba recoberta de policarbonat ($n = 1.55$) de tal manera que quan la llum es reflecteix en una part plana hi ha interferència constructiva i quan ho fa en un esglaó hi ha interferència destructiva (vegeu la figura). Els dos estats de la llum reflectida s'interpreten com els dos bits. Quina ha de ser la freqüència del làser utilitzat per a la lectura?



28. Quan la llum es reflecteix en una pel·lícula d'aigua amb sabó, una part ho fa en la superfície anterior i l'altra en la posterior. Quin és el gruix mínim d'una pel·lícula, amb un índex de refracció de 1.38, per què es produeixi una interferència constructiva quan reflecta llum de $\lambda = 420 \text{ nm}$?

(Tingueu en compte que la llum experimenta un canvi de fase de 180° quan es reflecteix en un medi amb un índex de refracció més alt.)



29. Un làser d'heli-neon de longitud d'ona 633 nm es fa incidir perpendicularment sobre un pla que conté dues escletxes. El primer màxim d'interferència s'observa a 82 cm de distància del màxim central sobre una pantalla situada a 12 m del pla.

a) Calculeu la separació de les escletxes.

b) Quants màxims d'interferència es poden veure sabent que la pantalla és un quadrat de 5 m de costat?

Solucions dels problemes d'ones electromagnètiques

1. a) 20 m/s, 0.126 m, 159 Hz ; b) -0.24 m
2. $y(x,t) = (4 \text{ m}) \sin(0.314x+3.14t)$ i 12.56 m/s
3. a) 20 ns, 6 m i 1.05 m^{-1} ; b) $(10^{-5} \text{ T}) \mathbf{k}$;
c) $(3000 \text{ N/C}) \sin[1.05x-(3.14 \times 10^8)t] \mathbf{j}$, $(10^{-5} \text{ T}) \sin[1.05x-(3.14 \times 10^8)t] \mathbf{k}$
4. a) 1.2 m, 4 ns, 5.24 m^{-1} , $1.57 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$;
b) $(4 \text{ V/m}) \sin[5.24z-(1.57 \times 10^9)t] \mathbf{j}$ (t en segons i z en metres) ;
c) $-(1.33 \times 10^{-8} \text{ T}) \sin[5.24z-(1.57 \times 10^9)t] \mathbf{i}$, (t en segons i z en metres) ;
d) $(0.042 \text{ W/m}^2) \sin^2[5.24z-(1.57 \times 10^9)t] \mathbf{k}$;
e) $7.08 \times 10^{-11} \text{ J/m}^3$ i $2.12 \times 10^{-2} \text{ W/m}^2$
5. a) $\mathbf{E}(y,t) = (12.3 \text{ V/m}) \sin[0.63y-(1.88 \times 10^8)t] \mathbf{k}$, on t és en segons i y en metres,
 $\mathbf{B}(y,t) = (4.1 \times 10^{-8} \text{ T}) \sin[0.63y-(1.88 \times 10^8)t] \mathbf{i}$;
b) $(0.4 \text{ W/m}^2) \sin^2[0.63y-(1.88 \times 10^8)t]$; c) 0.1 W ; d) 97 V
6. a) $\mathbf{E}(x,t) = (E_0/\sqrt{2}) \sin(kx-\omega t) (\mathbf{j}+\mathbf{k})$, $\mathbf{B}(x,t) = (E_0/c\sqrt{2}) \sin(kx-\omega t) (-\mathbf{j}+\mathbf{k})$
b) $\mathbf{E}(x,t) = (E_0/2) \sin(kx-\omega t) (\sqrt{3} \mathbf{j}-\mathbf{k})$, $\mathbf{B}(x,t) = (E_0/2c) \sin(kx-\omega t) (\mathbf{j}+\sqrt{3} \mathbf{k})$
7. a) 0.628 m i 477 MHz ; b) sentit positiu de l'eix de les x ;
c) $(194 \text{ V/m}) \cos[10x-(3 \times 10^9)t] \mathbf{j}$, $(0.647 \text{ } \mu\text{T}) \cos[10x-(3 \times 10^9)t] \mathbf{k}$
8. a) $\mathbf{E}(x,t) = (25.8 \text{ V/m}) \sin[(1.08 \times 10^7)x-(3.25 \times 10^{15})t] (0.94\mathbf{j}+0.34\mathbf{k})$,
 $\mathbf{B}(x,t) = (86 \times 10^{-9} \text{ T}) \sin[(1.08 \times 10^7)x-(3.25 \times 10^{15})t] (-0.34\mathbf{j}+0.94\mathbf{k})$;
b) $(1.75 \text{ Wm}^{-2}) \sin^2[(1.08 \times 10^7)x-(3.25 \times 10^{15})t] \mathbf{i}$; c) 0.88 Wm^{-2} i $2.9 \times 10^{-9} \text{ Jm}^{-3}$
9. a) 24.5 V/m i $8.17 \times 10^{-8} \text{ T}$; b) 2.45 V/m i $8.17 \times 10^{-9} \text{ T}$;
c) 0.245 V/m i $8.17 \times 10^{-10} \text{ T}$
10. a) 300 m ; b) 3 m ; c) $3 \times 10^{-11} \text{ m}$; d) 10 GHz ;
e) entre $4.3 \times 10^{14} \text{ Hz}$ i $7.5 \times 10^{14} \text{ Hz}$
11. a) 713 V/m i $2.38 \times 10^{-6} \text{ T}$; b) $3.8 \times 10^{26} \text{ W}$
12. a) $1.33 \times 10^{-9} \text{ W/m}^2$, $6.7 \times 10^{-10} \text{ W}$; b) $\mathbf{E}(z,t) = (10^{-3} \text{ V/m}) \sin[2\pi(z/2.68-t/89.3)] \mathbf{i}$,
 $\mathbf{B}(z,t) = (3.34 \times 10^{-12} \text{ T}) \sin[2\pi(z/2.68-t/89.3)] \mathbf{j}$, on z està en cm i t en ps ;
c) $5.74 \times 10^{-9} \text{ J/m}^3$
13. 1.8 mV
14. a) 28.2 km ; b) 0.027 V/m i 91.5 pT
15. a) $\mathbf{E}(x,t) = (2 \text{ V/m}) \cos[2\pi(5 \times 10^{14}t+x/6 \times 10^{-7})] \mathbf{j}$,
 $\mathbf{B}(x,t) = -(6.67 \times 10^{-9} \text{ T}) \cos[2\pi(5 \times 10^{14}t+x/6 \times 10^{-7})] \mathbf{k}$;
b) $5.3 \times 10^{-3} \text{ W/m}^2$; c) 25% ; d) $5 \times 10^{14} \text{ Hz}$, 400 nm
16. a) 3 W/m^2 ; b) 37.5%
17. 0.277
18. $2.25 \times 10^8 \text{ m/s}$, 526 nm i veurà el mateix color
19. a) 13.2° ; b) 19.5° ; c) 28.1° ; d) 35.3°

20. 3.51 m
21. 48.6°
22. a) 81.89° ; b) 11.89°
23. a) 86.3° ; b) 26.2×10^6
24. a) 2 V/m ; b) 0 ; c) $\sqrt{2}$ V/m
25. a) 0 ; b) 2 V/m ; c) $\sqrt{2}$ V/m
26. $2d \cos \mathbf{q} = n\mathbf{l} \rightarrow$ màxim, $2d \cos \mathbf{q} = (n+1/2)\mathbf{l} \rightarrow$ mínim.
27. 4.4×10^{14} Hz
28. 76.1 nm
29. a) $9.28 \mu\text{m}$; b) 7