TRACTAMENT DE DADES EXPERIMENTALS

Quan mesurem una determinada magnitud (voltatge, intensitat, ...), el resultat que obtenim no és un valor exacte sinó un interval al voltant d'un valor aproximat. El resultat de la mesura s'acostuma a escriure

$$\boxed{x \pm e_x}$$

x és el valor del resultat de la mesura que es considera millor

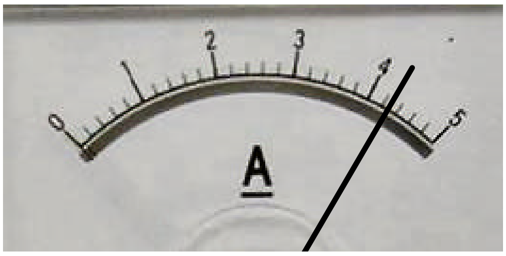
e_x **error** de x

L'**error relatiu** es defineix com $\boxed{e_{rel,x} = \dfrac{e_x}{|x|}}$

Aparells analògics

Resolució: diferència entre dos valors consecutius de l'escala

Error de resolució = Resolució/2



A l'exemple la resolució és de 0.2 A

la intensitat mesurada I està en l'interval

$$4.2 \text{ A} < I < 4.4 \text{ A} \quad \rightarrow \quad I = 4.3 \text{ A}$$

l'error de la mesura és e_I = Resolució/2 = (0.2 A)/2 = 0.1 A

$$\boxed{I = 4.3 \text{ A} \pm 0.1 \text{ A} = (4.3 \pm 0.1) \text{ A}} \qquad e_{rel,I} = 0.1/4.3 = 0.024 \rightarrow 2.4\%$$

Aparells digitals

Resolució: una unitat de l'últim dígit

Error de resolució = Resolució

A l'exemple $I = 0.198$ A

la resolució és de 0.001 A

e_I = Resolució = 0.001 A

$$\boxed{I = (0.198 \pm 0.001) \text{ A} = (198 \pm 1)\times 10^{-3} \text{ A} = (198 \pm 1) \text{ mA}}$$

Propagació d'errors

No totes les magnituds es poden mesurar directament

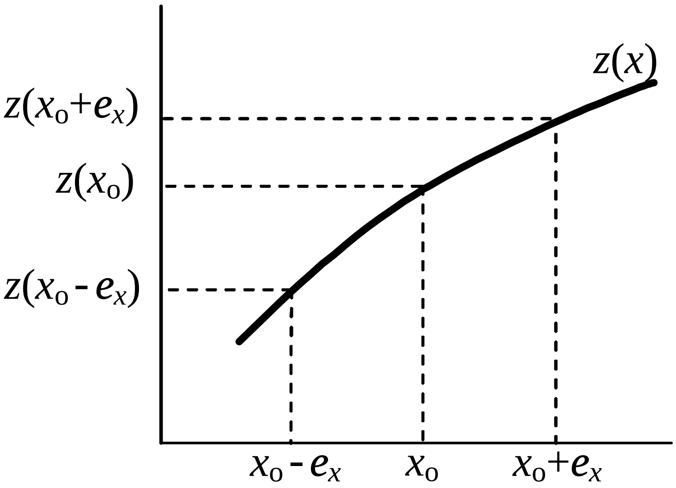
Exemple: L'àrea d'un cercle, A, es determina a partir del seu diàmetre D

$$A = A(D) = p\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{p}{4}D^2$$

Si una magnitud z és funció d'una altra magnitud x, $z(x)$

quan calculem el valor de z a partir de la mesura directa $x \pm e_x$

l'error de x és propaga a la **mesura indirecta** de z $z \pm e_z$



Si $z'(x_o) = \dfrac{dz}{dx}$ a x_o

Taylor: $z(x) \approx z(x_o) + z'(x_o)\cdot(x - x_o)$

$z(x_o+e_x) \approx z(x_o) + z'(x_o)e_x$

$z(x_o-e_x) \approx z(x_o) - z'(x_o)e_x$

L'error estimat de z és

$$\boxed{e_z = e_z(x) = \left|\frac{dz}{dx}\right| e_x}$$

Exemple: Quina és l'àrea d'un cercle de diàmetre D = (12.5 ± 0.5) mm

$A = \dfrac{p}{4}D^2 = p\,(12.5\text{ mm})^2/4 = 122.71846\text{ mm}^2$

$$\frac{dA}{dD} = \frac{p}{2}D \quad \leftarrow \left(\begin{Bmatrix} D = x \\ A = z \end{Bmatrix} \rightarrow z = \frac{p}{4}x^2 \rightarrow \frac{dz}{dx} = 2\frac{p}{4}x = \frac{p}{2}x \right)$$

$$e_A(D) = \left|\frac{dA}{dD}\right| e_D = \left|\frac{p}{2}D\right| e_D = \left|\frac{p}{2}(12.5\text{ mm})\right|(0.5\text{ mm}) = 9.817477\text{ mm}^2$$

Expressió d'un resultat experimental

Té sentit escriure (122.71846 ± 9.817477) mm^2 ???

És absurd donar la magnitud amb 4 decimals si l'error és de l'ordre de 10

També és absurd donar un error amb tants dígits

Hem de suprimir xifres

Hi ha tres possibles maneres de suprimir xifres d'una quantitat

a) **Aproximació per defecte o truncament**

Suprimir les xifres sobrants

Exemple: Si no volem decimals

$42.984 \rightarrow 42$; $42.373 \rightarrow 42$; $42.500 \rightarrow 42$

b) **Aproximació per excés**

Suprimir les xifres sobrants i sumar una unitat a l'última xifra expressada

Exemple: Si no volem decimals

$42.984 \rightarrow 43$; $42.373 \rightarrow 43$; $42.500 \rightarrow 43$

c) **Arrodoniment**

Truncar o aproximar per excés d'acord amb el criteri següent:
- Si la xifra d'ordre més alt suprimida és inferior a 5, es trunca
- Si la xifra d'ordre més alt suprimida és superior o igual a 5, s'aproxima per excés

Exemple: Si no volem decimals

$42.984 \rightarrow 43$; $42.373 \rightarrow 42$; $42.500 \rightarrow 43$

Xifres significatives: xifres (dígits) d'un número sense comptar els zeros que indiquen ordre decimal.

Exemple: La primera xifra significativa de 0.09641 *és el* 9 *i la segona el* 6

L'error s'aproxima per excés amb una o dues xifres significatives

Exemples de l'expressió correcta dels errors

Valor de l'error	amb 2 xifres significatives	amb 1 xifra significativa
1.3458	1.4	2
57.763	58	$60 = 6\times10$
0.0276	0.028	0.03
$247000 = 24.7\times10^4$	$250000 = 25\times10^4$	3×10^5
0.0298	0.030	0.03

Una vegada s'ha expressat l'error amb una o dues xifres significatives, el valor de la magnitud s'expressa de manera que l'última xifra significativa sigui del mateix ordre que la d'ordre més baix a l'error.

El valor de la magnitud s'arrodoneix

Exemples de l'expressió correcta del resultat d'una mesura (amb dues xifres significatives a l'error)

Magnitud	Error	Expressió correcta
2.5483	1.3458	2.5 ± 1.4
3458.9353	57.763	3459 ± 58
67.8295	0.0276	67.830 ± 0.028
98657320.6	247000	$9866\times10^4 \pm 25\times10^4$
809.4563	0.0298	809.456 ± 0.030

Exemple: $A = 122.71846\ \text{mm}^2$ i $e_A = 9.817477\ \text{mm}^2$

2 xifres significatives a e_A $A = (122.7 \pm 9.9)\ \text{mm}^2 = (1.227 \pm 0.099)\ \text{cm}^2$

1 xifra significativa a e_A $A = (123 \pm 10)\ \text{mm}^2 \approx (1.2 \pm 0.1)\ \text{cm}^2$

Error d'una magnitud funció d'altres

Si z depèn de més d'una magnitud $z(x_1, ..., x_i,..., x_N)$ amb $x_i \pm e_{x_i}$

el seu error e_z és la mitjana quadràtica dels errors que produirien cadascuna de les variables ($x_i \pm e_{x_i}$) per separat suposant que les altres són constants

cada $x_i \pm e_{x_i}$ produeix un $\boxed{e_z(x_i) = \left|\frac{\partial z}{\partial x_i}\right| e_{x_i} \quad (i = 1,...., N)}$

i l'error propagat a z és $\boxed{e_z = \sqrt{e_z^2(x_i) + ... + e_z^2(x_N)}}$

$\frac{\partial z}{\partial x_i}$ és la derivada parcial de z respecte x_i

derivar z respecte x_i com si les altres variables fossin constants

En el cas d'una magnitud que depèn de dues variables, $z(x,y)$,

$$e_z(x) = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| e_x \quad \text{i} \quad e_z(y) = \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| e_y \quad \rightarrow \quad e_z = \sqrt{e_z^2(x) + e_z^2(y)}$$

Exemple: $z = ax - by \quad \rightarrow \quad e_z = \sqrt{e_z^2(x) + e_z^2(y)} = \sqrt{(ae_x)^2 + (be_y)^2}$

Errors de magnituds que són productes i quocients

En els dos casos particulars $z(x) = ax$ i $z(y) = \frac{a}{y}$ on a és una constant,

$$z = ax \;\rightarrow\; e_z(x) = \left|\frac{dz}{dx}\right| e_x = |a| e_x = |a||x| \frac{e_x}{|x|} = |z| e_{rel,x} \;\rightarrow\; \boxed{e_z(x) = |z| e_{rel,x}}$$

$$z = \frac{a}{y} \;\rightarrow\; e_z(y) = \left|\frac{dz}{dy}\right| e_y = \left|-\frac{a}{y^2}\right| e_y = \left|\frac{a}{y}\right| \frac{e_y}{|y|} = |z| e_{rel,y} \;\rightarrow\; \boxed{e_z(y) = |z| e_{rel,y}}$$

En el cas d'una magnitud z que depèn de dues variables x i y de la forma

$$z = bxy \quad \text{o} \quad z = b\frac{x}{y} \quad \rightarrow \quad e_z(x) = |z| e_{rel,x} \quad \text{i} \quad e_z(y) = |z| e_{rel,y}$$

$$e_z = \sqrt{e_z^2(x) + e_z^2(y)} = |z| \sqrt{e_{rel,x}^2 + e_{rel,y}^2}$$

Resum

En els **aparells analògics** es considera que l'error de resolució és igual a la meitat de la diferència entre dos valors consecutius de l'escala.

En els **aparells digitals** es considera que l'error de resolució és igual a una unitat en l'últim dígit.

El resultat de la mesura s'acostuma a escriure $\boxed{x \pm e_x}$
on x és el resultat de la mesura que es considera millor i e_x és un nombre real positiu (amb les mateixes unitats que x) anomenat **error absolut**.

L'**error relatiu** es defineix com $\boxed{e_{rel,x} = \dfrac{e_x}{|x|}}$

L'error estimat de $z(x)$ és $\boxed{e_z(x) = \left|\dfrac{dz}{dx}\right| e_x}$

Exemples: $z = ax \quad \to \quad e_z(x) = |a| e_x = |z| e_{rel,x}$

$$z = a/y \quad \to \quad e_z(y) = \left|\frac{-a}{y^2}\right| e_y = |z| e_{rel,y}$$

L'error estimat de $z(x,y)$, $\boxed{e_z = \sqrt{e_z^2(x) + e_z^2(y)}}$
és la mitjana quadràtica de l'error que produiria x, $e_z(x)$, i el que produiria y, $e_z(y)$, suposant que l'altra variable és constant.

Exemple: $z = ax - by \quad \to \quad e_z = \sqrt{e_z^2(x) + e_z^2(y)} = \sqrt{(ae_x)^2 + (be_y)^2}$

En el cas de les magnituds que s'expressen com productes i quocients

$$z = bxy \quad \text{o} \quad z = bx/y \quad \to \quad e_z = \sqrt{e_z^2(x) + e_z^2(y)} = |z| \sqrt{e_{rel,x}^2 + e_{rel,y}^2}$$

L'ERROR S'APROXIMA PER EXCÉS a 1 o 2 xifres significatives.

EL VALOR DE LA MAGNITUD S'ARRODONEIX, de manera que l'última xifra significativa sigui del mateix ordre que la d'ordre més baix a l'error.

Exercicis

1. Expresseu correctament, amb 2 xifres significatives a l'error, els resultats següents:

58.023 ± 3.001

41.091 ± 3.25

9.095 ± 0.322

0.38423 ± 0.00743

0.0426031 ± 0.00188

825.27348 ± 0.05892

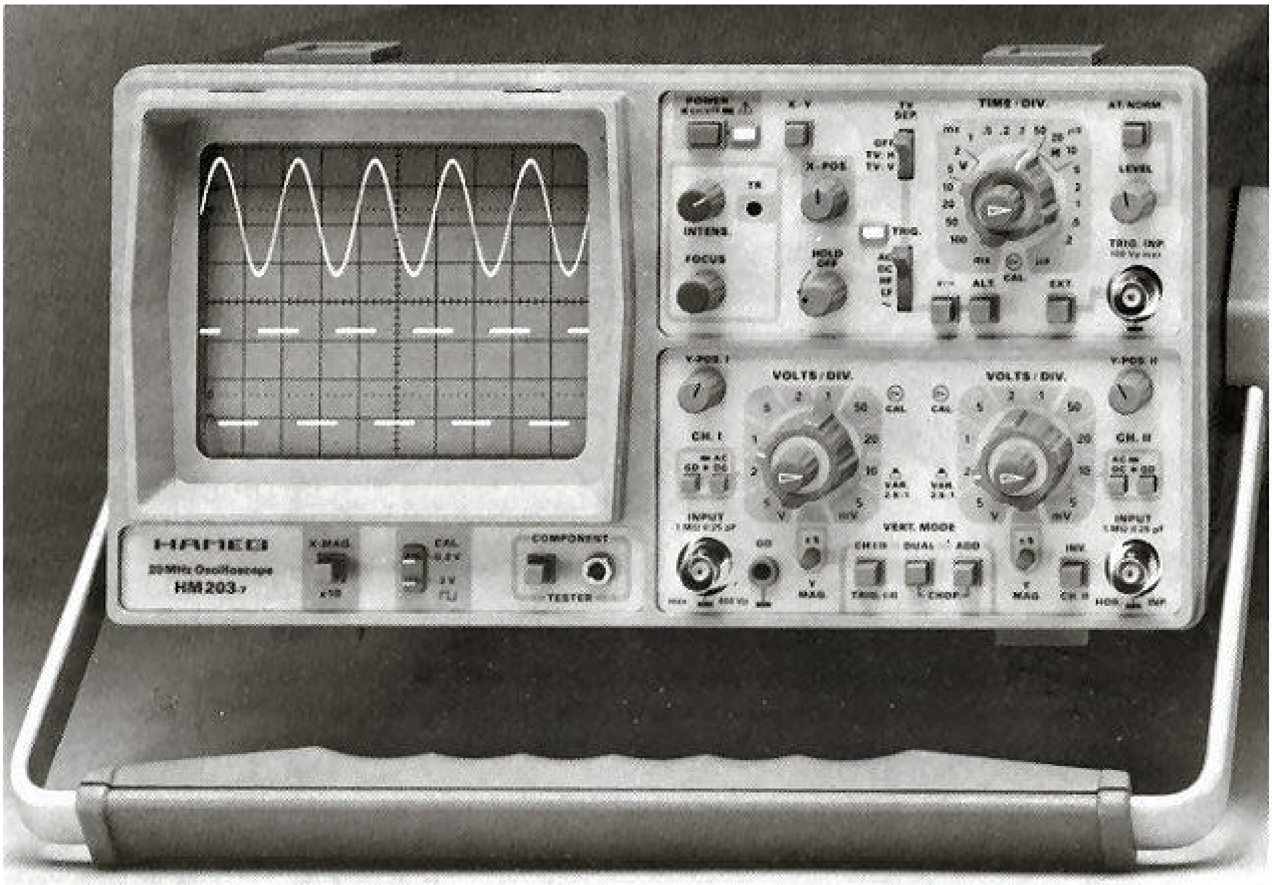
499.6 ± 13.02

2. Hem mesurat la intensitat I que circula per una resistència i la diferència de potencial V als seus extrems amb els resultats següents

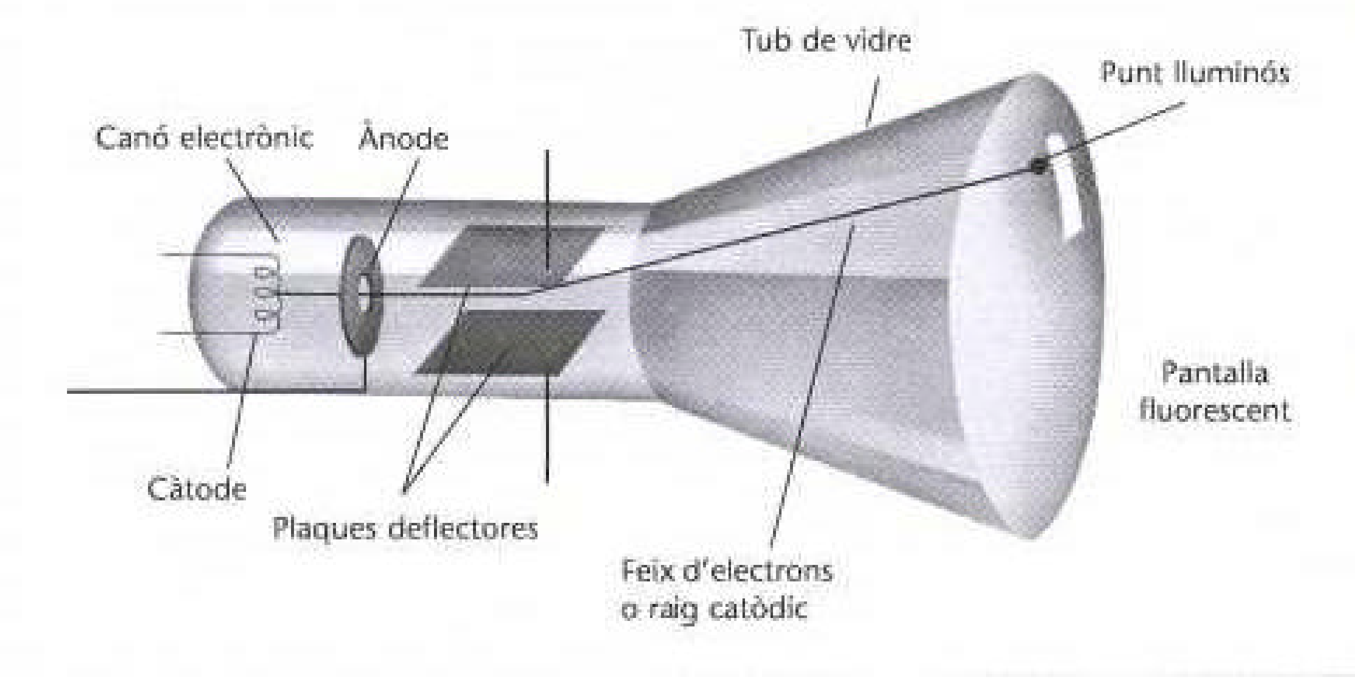
$$I = (0.245 \pm 0.005)\ \text{A} \qquad \text{i} \qquad V = (8.37 \pm 0.01)\ \text{V}$$

Tenint en compte la llei d'Ohm ($R = V/I$) determineu el valor de la resistència i el seu error. Expresseu el resultat amb 1 xifra significativa a l'error. **Fixeu-vos que la relació de *R* amb *V* o *I* és del tipus $z(x) = ax$ o $z(y) = a/y$.**

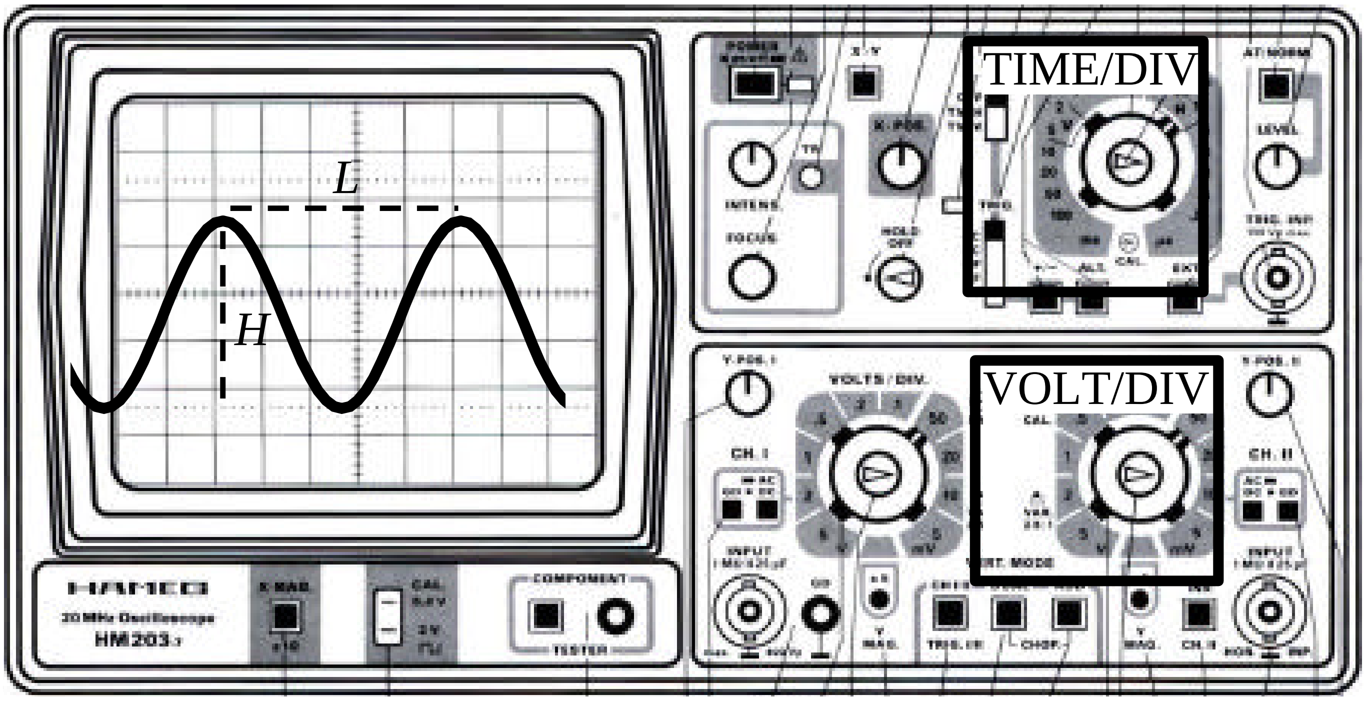
L'OSCIL·LOSCOPI



Tub de ratjos catòdics



Mesures amb l'oscil·loscopi



TIME/DIV $\leftrightarrow$ **Base de temps**: $B = 10\ \mu\text{s/div}$

$L = 5$ div $\rightarrow$ Període: $\boxed{T = B\,L = 50\ \mu\text{s}}$

VOLT/DIV $\leftrightarrow$ **Coeficient de deflexió**: $A = 5$ V/div

$H = 4$ div $\rightarrow$ Tensió pic a pic: $V_{pp} = A\,H = 20$ V

Amplitud de la tensió: $V_0 = V_{pp}/2 = 10$ V

La resolució de la pantalla és de 0.2 div $\rightarrow$ $e_L = e_H = 0.1$ div

$L = (5.0 \pm 0.1)$ div $\boxed{e_{rel,L} = e_L/L = 0.1/5 = 0.02}$

$H = (4.0 \pm 0.1)$ div $e_{rel,H} = e_H/H = 0.1/4 = 0.025$

***B* i *A* tenen un 3% d'error**: $e_{rel,B} = e_{rel,A} = 0.03$

Quin és l'error de *T*?

$T = B\,L \rightarrow \boxed{e_T = |T|\sqrt{e_{rel,B}^2 + e_{rel,L}^2} = (50\mu\text{s})\sqrt{0.03^2 + 0.02^2} = 1.8028\ \mu\text{s}}$

(és del tipus $z = bxy$, amb $b = 1$)

Expressió correcta del resultat de la mesura de *T* $\boxed{T = (50.0 \pm 1.9)\ \mu\text{s}}$

Quant val V_0, amb el seu error, expressat correctament?